

Предисловие

Настоящее пособие рекомендуется учащимся старших классов, студентам 1 и 2 курсов, готовящимся к участию в олимпиадах, а также преподавателям классов физико-математического профиля.

В обширном массиве олимпиадных задач трудно ориентироваться даже подготовленным учащимся и квалифицированным учителям. Стремление решать трудные нестандартные задачи без предварительного изучения базовых идей, методов, классов олимпиадных задач не всегда приводит к желаемому результату. За отдельными задачами и фактами учащийся должен увидеть фундаментальные математические понятия и конструкции общематематических идей.

В пособии представлены циклы задач по избранным разделам олимпиадной математики. В каждом параграфе содержатся краткие сведения об основных понятиях, теоремах, приведены методы решения задач, примеры. В завершении раздела представлены задачи для самостоятельного изучения, к которым даны ответы, указания и решения.

Раздел «Логические задачи» является базисным. В нем изложены элементы математической логики. Хотя многие из предлагаемых задач можно решить непосредственно с помощью перебора, схем, знакомство с элементами алгебры логики имеет важное общеобразовательное значение и в других дисциплинах (информатика, физика). В настоящее время в учебные планы многих специальностей в вузах включены курсы «Дискретная математика», «Математическая логика», которые предполагают определенную логическую культуру учащихся и навыки обращения с логическими переменными.

Параграфы «Принцип Дирихле», «Инварианты и полуинварианты», «Принцип крайнего» посвящены традиционной олимпиадной тематике.

При решении экстремальных задач школьного курса математики обычно используются методы, основанные на

применении производной. Этот подход, как правило, неприменим в задачах на максимум-минимум, предлагаемых на олимпиадах. В разделе пособия «Задачи на максимум – минимум» представлены различные методы, которые используются при решении нестандартных задач данного типа.

В настоящее время в части 2 ЕГЭ рассматриваются задачи, предполагающие применение нестандартных идей, подходов к решению уравнений, неравенств, которые недостаточно изучаются в общеобразовательной школе. В разделе «Нестандартные уравнения и неравенства» изложены различные методы решений, основанные на таких свойствах функций, как ограниченность, монотонность, симметрия и другие.

При составлении сборника использовались задачки, указанные в библиографическом списке.

Учащиеся, успешно освоившие изложенные в пособии идеи, методы, могут активно и системно приступать к решению задач из известных сборников [1-4].

Пособие отражает опыт проведения занятий с учащимися – призерами олимпиад, а также освещает содержание курса лекций, который был прочитан учителям математики Рязанской области в РИРО.

Авторы выражают благодарность заведующему кафедрой высшей математики РГРТУ, доценту Бухенскому К.В. за активную поддержку издания данного пособия, а также доценту Новикову А.И. за полезные обсуждения материала книги.

§ 1. Логические задачи

1.1. Определения. Примеры

Логические задачи решаются различными способами: перебором вариантов; применением алгебры логики. Решению логических задач, в которых рассматриваются два или более конечных множеств, между которыми надо установить взаимно однозначное соответствие, часто помогает использование всевозможных таблиц и схем.

Пример 1. Беседуют трое: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас русский, другой – брюнет, а третий – рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?

Решение. Для решения задачи воспользуемся таблицей 3×3 . По условию задачи Белокуров не русский, Чернов не черный и Рыжов не рыжий. Это позволяет поставить знак « - » в соответствующих клетках. Кроме того, по условию Белокуров – не брюнет и, значит, в клетке на пересечении строки «Белокуров» и столбца «Черный» также надо поставить знак « - ».

Фамилия	Цвет волос		
	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров		-	-
Чернов		-	
Рыжов	-		

Из таблицы следует, что Белокуров может быть только рыжим. Поставим знак «плюс» в соответствующей клетке. Отсюда видно, что Чернов не рыжий. Обозначим это знаком «минус» в таблице. Теперь ясно, что Чернов может быть только русым, а Рыжов – брюнетом.

Содержание

Предисловие	3
§1. Логические задачи.....	5
1.1. Определения. Примеры.....	5
1.2. Задачи для самостоятельного решения.....	11
1.3. Решения, указания, ответы.....	15
§2. Принцип Дирихле.....	21
2.1. Определения. Примеры.....	21
2.2. Задачи для самостоятельного решения.....	25
2.3. Решения, указания, ответы.....	27
§3. Инварианты. Полуинварианты.....	32
3.1. Инварианты.....	32
3.2. Полуинварианты.....	35
3.3. Задачи для самостоятельного решения.....	37
3.4. Решения, указания, ответы.....	42
§4. Задачи на максимум-минимум.....	49
4.1. Примеры.....	49
4.2. Задачи для самостоятельного решения.....	54
4.3. Решения, указания, ответы.....	57
§5. Нестандартные уравнения, неравенства, системы.....	68
5.1. Основы теории. Примеры.....	68
5.2. Задачи для самостоятельного решения.....	75
5.3. Решения, указания, ответы.....	79
§6. Принцип крайнего.....	96
6.1. Примеры.....	96
6.2. Задачи для самостоятельного решения.....	100
6.3. Решения, указания, ответы.....	104
Библиографический список.....	112